Részletes szakmai beszámoló

Megjegyzés: Az 1-23 sz. dolgozatok a 2006 évi részjelentés tartalma.

1. Az Euler féle φ függvény és iteráltjai

Legyen $\varphi_k(n)$ és $\sigma_k(n)$ a φ függvény, és az osztók összege függvény k-adik iteráltja.

Kátai és Subbarao megmutatták [39], hogy

$$\#\{n \mid \varphi_{k+1}(n) \le x\} = \{1 + o_x(1)\}\#\{n \mid \varphi(n) \le k!(\log\log\log x)x.$$

Legyen $E_k(n) := (n, \varphi_k(n))$, $K_k(n) = (n, \sigma_k(n))$, $A(n, y) = \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p<y}} p^\alpha$.

[18]-ban bizonyítottuk, hogy

$$\frac{1}{x}\#\left\{n \le x : E_k(n) \ne A(n, (\log\log x)^k\right\} \to 0 \quad (x \to \infty)$$
$$\frac{1}{x}\#\left\{n \le x : K_k(n) \ne A(n, (\log\log x)^k\right\} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

és azt is, hogy hasonló állítás igaz a "prím $+a$" halmazra.

Elfogadott [1]-ben aszimptotikus becslést adtunk a $\#\{n \le x \mid \omega((n, \varphi_k(n)) = r\}$ mennyiségre.

Elfogadott [2]-ben megmutattuk, hogy

$$\#\{n \le x \mid GCD(n\tau(n), \sigma(n) = 1\} = c(1 + o_x(1))\sqrt{\frac{x}{\log x}}.$$

2. Aritmetikai függvények eloszlásának, középértékeinek vizsgálata rövid intervallumokon

A Ramachandra által részletesen kidolgozott Hooley-Huxley kontúron integrálva számos aritmetikai függvény rövid intervallumon való viselkedését meg lehet határozni:

[40]-ben ezt $\sum \tau(n)\omega(n)$-re, és $\sum \frac{\beta(n)}{n}$-re adtuk meg, ahol $\tau(n)$, $\omega(n)$, $\beta(n)$ az n osztóinak száma, prímosztóinak száma, prímosztóinak összege, és az intervallum $[x, x + x^{7/12+\varepsilon}]$ típusú.

Legyen $\tau^{(e)}(n)$ az n exponenciális osztóinak a száma, $h(x) = x^{1/5}(\log x)^{3/2}u(x)$, $u(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$.

[32]-ben beláttuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n\in[x,x+h(x)]} \tau^{(e)}(n)^\alpha = c,$$

$c = c(\alpha) > 0$, ha $1 \leq \alpha < \infty$.

3. q-additív és q-multiplikatív függvények

Delange tételének megfelelőit bizonyítottuk be [17]-ben $q = 2$ esetén $\alpha(n) = k$ feltétel mellett, (k rögzített), $\alpha(n) = n$ bináris jegyeinek összege. [41]-ben általános q-ra bizonyítottunk hasonló tételeket.

[33]-ban q-additív függvényekre bizonyítottunk centrális határeloszlástételt, az $\{n + 1 \leq x \mid \omega(n) = k\}$ halmazon, ha k a $2 \leq k \leq \delta(x) \log\log x$, $\delta(x) \to 0$ feltételnek eleget tesz. Elfogadott [6]-ban ugyanazt az $\{n \leq x \mid \omega(n) = k\}$ halmazon vizsgáltuk.

[42]-ben q-additív függvények lineáris kombinációinak prímhelyeken felvett értékeire bizonyítottunk határeloszlástételeket.

[43]-ban meghatároztuk azokat a q-multiplikatív függvényeket, amelyeket prímhelyeken definiálva az $\mathcal{L}^\alpha$ vagy $\mathcal{L}^*$(= egyenletesen szummálható függvények) osztályba tartoznak.

4. Particiós problémák

Legyen $f_k(n)$ az $n = m_1 m_2 \dots m_k$ megoldásszáma, ahol $(2 \leq) m_1 < \dots < m_k$, $m_j - k$ egészek. [19]-ben a $\sum\limits_{n \leq x} f_k(n)$ összegre bizonyítottunk aszimptotikus formulát jó maradéktaggal.

[20]-ban $\sum\limits_{n \leq x} e^*(n)$-re aszimptotikus formulát adtunk, ahol $\sum \frac{e^*(n)}{n^s} = \prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^s}\right)$.

[25]-ben bizonyos feltételeket kielégítő $e(n)$ sorozatra a $\sum \frac{f(n)}{n^s} = \prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{e(n)}{n^s}\right)$ formulával definiált $f(n)$-re kiszámítottuk a $\sum\limits_{n \leq x} f(n)$ összeg aszimptotikáját.

5. Egyéb problémák aritmetikai függvényekre

[35]-ben sikerült megmutatni, hogy

$$\#\{n \leq x \mid \rho(n) = \text{egész}\} = (1 + o_x(1)) c \frac{x}{\log\log x},$$

ahol $\omega(n) = n$ prímosztóinak száma, $\beta(n) = n$ prímosztóinak összege, $\rho(n) = \frac{\beta(n)}{\omega(n)}$, pontosítva W. Banks et al. eredményét.

[14]-ben F. Luca egy eredményét pontosítva bebizonyítottuk, hogy azon pozitív egészek halmaza, amelyek nem írhatók $n - \Omega(n)$ alakban, pozitív alsó sűrűségű.

A. Ivič problémáját sikerült megoldani [36]-ban. Sikerült belátni, hogy

$$\sum_{n \leq x} \tau(n + \tau(n)) = D x \log x + O\left(\frac{x \log x}{\log\log x}\right).$$

Legyen $e_n := \frac{\varphi(n)}{\tau(n)^2}$, $B_\nu = \{n \mid e_n = 2^\nu m_1/m_2,\ m_1, m_2 \text{ páratlan egész}\}$. $B_\nu^* = \{n \mid e_n = 2^\nu m,\ m \text{ páratlan egész}\}$. [282]-ben a $B_\nu^* \cap \{n \mid \omega(n) = k\}$,

$B_\nu \cap \{n \mid \omega(n) = k\}$ halmazok x-nél kisebb elemeinek számát határoztuk meg jó maradéktaggal.

6. Additív függvények eloszlása az egész számok részhalmazain

Germán László bebizonyította [37]-ben, hogy az Erdős-Wintner tétel érvényes marad, ha az elosztást olyan $n+1 \le x$ egészek halmazán vizsgáljuk, ahol $\omega(n) = k$ rögzített és $2 \le k \le \varepsilon_x \sqrt{\log\log x}$, $\varepsilon_n \to 0$.

7. Egyértelműségi, és $\bmod 1$ egyértelműségi halmazok

Fehér és Kátai [11]-ben a $\{\varphi(n)|n \in \mathbb{N}\}$ által generált multiplikatív csoportot vizsgálta másodfokú kvadratikus polinomokra, és néhány polinomra ezt meghatározták.

8. A Daboussi tétel analogonjai

Kátai

$$\max_{\substack{|X_{p_1}|\le 1\\ |X_{p_2}|\le 1}} \left| \sum_{p_1 p_2 \le x} X_{p_1} X_{p_2} e^{2\pi i p_1 p_2 \alpha} \right|$$

összegre bizonyított nem triviális felső becslést, bizonyos (majdnem minden) irracionális α-számokra. Ezt elfogadott [4]-ben kiterjesztették k tényezős egész számokra:

$$\max_{|X_{p_1}|\le 1,\dots,|X_{p_k}|\le 1} \left| \sum_{p_1 \dots p_k \le x} X_{p_1} \dots X_{p_k} e^{2\pi i p_1 \dots p_k^\alpha} \right|$$

nem triviális felső becslést bizonyítottak a szerzők.